



O EFEITO P-DELTA NAS ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS

Socrate Muñoz

Introdução – 3

O que é o efeito P-Delta? – 4

Tipos de efeito P-Delta – 6

Estruturas de nós fixos e nós móveis – 7

Métodos de cálculo – 9

Coeficientes amplificadores dos efeitos de 1a ordem – 9

Método iterativo – 11

Método direto – 12

Método do pilar com área a cortante negativa – 15

Método do pilar com rigidez a flexão negativa – 16

Efeitos combinados de torção e translação – 17

Ferramentas informáticas de cálculo – 18

CAD/TQS – 18

SAP2000 – 19

AltoQi - Eberick

Exemplos de cálculo – 20

Método iterativo – 21

Método direto – 23

Conclusão – 27



Por: Socrate Muñoz | Engenheiro Civil

A avaliação da estabilidade global é um dos mais importantes fatores para a concepção estrutural de um edifício. Ela visa garantir a segurança da estrutura ante a perda de sua capacidade resistente, causada pelo aumento das deformações em decorrência das ações. A ação combinada das cargas verticais e os deslocamentos laterais causam um incremento nas forças internas. Isso em algumas estruturas pode ser importante. O fenômeno, chamado de efeito P-Delta, tem uma natureza não linear e muitos engenheiros estruturais não têm uma clara compreensão do mesmo, nem de suas consequências.

Neste e-book, apresentaremos alguns dos métodos mais utilizados para o cálculo do efeito P-Delta em estruturas de edifícios. Esperamos que você compreenda o embasamento e as limitações dos mesmos e consiga fazer uma melhor seleção entre os softwares disponíveis no mercado para calcular estes efeitos.

Boa leitura!

O que é o efeito P-Delta?

Nos edifícios com cargas laterais ou assimetrias geométricas, de rigidez ou massa, produzem-se deslocamentos laterais nos pavimentos. As cargas verticais geram momentos adicionais iguais à soma da carga vertical “P” multiplicada pelos deslocamentos laterais “Delta”. Razão pela qual o efeito é conhecido como “P-Delta”. Estes esforços adicionais são chamados de segunda ordem, pois são calculados na configuração deformada da estrutura. A figura 1 permite entender melhor o efeito:

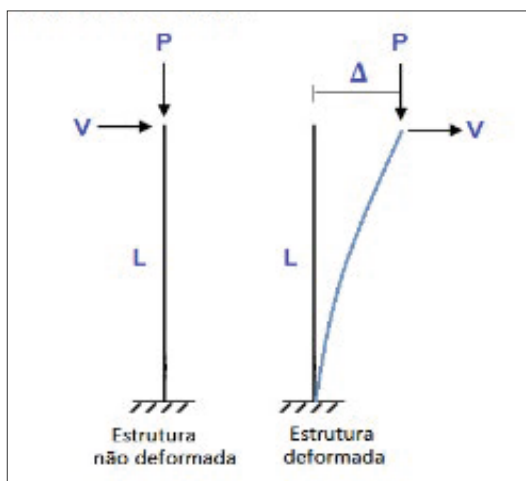


Figura 1 - Estados não deformado e deformado da estrutura.

No estado não deformado da estrutura, chamado análise de primeira ordem, o momento fletor na base será $M = V \cdot L$. Observe que a carga P não produz momento fletor na base. O deslocamento lateral é:

$$\Delta = \frac{VL^3}{3EI} \quad (1)$$

Como $M = V \cdot L$:

$$\Delta = \frac{ML^2}{3EI} \quad (2)$$

Se consideramos o estado deformado do pilar, o momento-fletor na base será:

$$M = V \cdot L + P \cdot \Delta \quad (3)$$

e o deslocamento lateral:

$$\Delta = \frac{ML^2}{3EI} = \frac{(VL + P\Delta)L^2}{3EI} = \frac{VL^3}{3EI} + \frac{P\Delta L^2}{3EI} \quad (4)$$

Observe que o momento na base M e os deslocamentos no topo são maiores e o incremento está relacionado com o termo $P \cdot \Delta$. Pode-se ver também que o novo deslocamento lateral depende do anteriormente calculado, causado pela carga V .

A primeira ideia é que trata-se de um problema de não linearidade geométrica que deve ser tratado de forma iterativa, calculando o deslocamento lateral devido à carga V . Com este deslocamento calcula-se o momento fletor e o novo deslocamento lateral, considerando a parcela $P \cdot \Delta$. O processo pode ser repetido até que o deslocamento encontrado em uma iteração tenha uma diferença muito pequena com o deslocamento da iteração anterior.

Existem várias técnicas para avaliar estes efeitos de segunda ordem. A maioria delas considera o problema como um caso de não linearidade geométrica e tem natureza iterativa,

o que pode resultar numericamente pouco eficiente e não apropriado para considerar o efeito $P\cdot\Delta$ na análise dinâmica.

Uma análise da equação (4) indica que podemos agrupar os termos que contêm o deslocamento Δ , e isolando este obtemos:

$$\Delta = \frac{VL^3}{3EI - PL^2} \quad (5)$$

A equação anterior permite obter em um passo, sem iterações e de forma “exata”, o deslocamento lateral considerando os efeitos de segunda ordem. Assim, o procedimento iterativo não linear pela geometria é “linearizado”, realizando os cálculos com uma rigidez diminuída. Observe que, na expressão (4), a rigidez é $3EI/L^3$, no entanto, na (5) resulta um valor menor, sendo $(3EI - PL^2)/L^3$. A figura 2 mostra graficamente a diferença entre estes procedimentos.

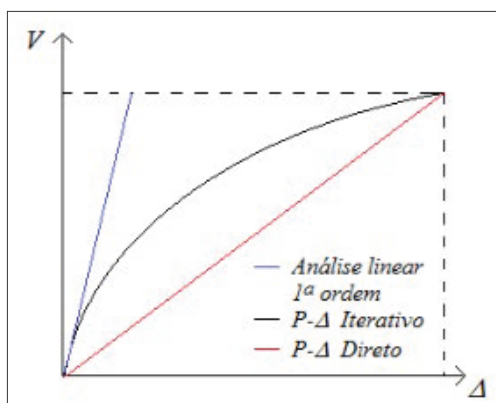


Figura 2 - Comparação gráfica entre métodos de análise.

Tipos de efeito P-Delta

Existem dois tipos de efeito P-Delta:

- $P\cdot\Delta$: efeito global dos deslocamentos laterais na estrutura (Fig. 3)
- $P\cdot\delta$: efeito local nos elementos, associado com deformações locais relativas à corda entre os extremos do elemento (Fig. 4)



Figura 3 - Efeito $P-\Delta$.

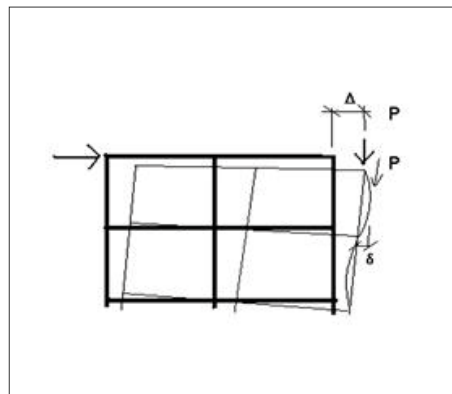


Figura 4 - Efeito $P-\delta$.

A magnitude do efeito P-Delta está relacionada com:

- A magnitude da carga axial P ;
- Rigidez e esbeltez global da estrutura;
- Esbeltez dos elementos individuais.

Uma análise de segunda ordem rigorosa deve combinar os efeitos da teoria de grandes deslocamentos, onde o equilíbrio é analisado no estado deformado da estrutura e seus elementos, e o efeito da carga axial na rigidez dos elementos (chamado de “stress stiffening”, onde as cargas de compressão incrementam as deformações laterais locais dos elementos enquanto as de tração reduzem este efeito).

Estruturas de nós fixos e nós móveis

É muito importante ter um critério que permita determinar quando considerar os efeitos de segunda ordem. Segundo a NBR 6118:2014, eles podem ser desprezados, se o acréscimo em relação aos efeitos de primeira ordem não é superior a 10%. O efeito P-Delta pode ser aplicado em qualquer tipo de estrutura, mas para criar condições mais simples de cálculo costuma-se definir as estruturas de nós fixos e nós móveis.

As estruturas são consideradas de nós fixos quando os efeitos globais de segunda ordem são desprezíveis (inferiores a 10% dos respectivos esforços de primeira ordem). E de

nós móveis quando os efeitos de segunda ordem são superiores a 10% dos respectivos esforços de primeira ordem.

Na realidade, as estruturas de nós fixos têm nós deslocáveis, mas os deslocamentos horizontais são tão pequenos que podem ser desprezados. Por outro lado, as estruturas de nós móveis não possuem nós que se movimentam de forma significativa, mas seus deslocamentos precisam ser considerados na análise. Portanto, o efeito P-Delta deve ser calculado.

Métodos de cálculo

Coeficientes amplificadores dos efeitos de 1ª ordem

A ideia neste método é simplificar o cálculo dos efeitos de segunda ordem, multiplicando os de primeira ordem por um coeficiente de majoração. A Norma ABNT NBR 6118: 2014 indica a utilização do coeficiente η , criado por Franco e Vasconcelos (1991), como parâmetro de instabilidade ou como coeficiente de majoração de esforços para considerar - de forma aproximada - os efeitos de segunda ordem global. No entanto, existem situações em que fica inviável ou pouco confiável o uso de tal coeficiente.

Uma análise das hipóteses básicas para a obtenção do coeficiente η indica não utilizar este processo simplificado nas seguintes situações (A. Vasconcelos, 2000):

1. se, no topo do edifício, alguns pilares sobem para apoiar lajes de tamanho reduzido ou caixas de água;
2. se há mudança brusca de inércias entre pavimentos, em especial entre o térreo e o primeiro andar;
3. se os pés direitos forem muito diferentes entre os pavimentos;
4. se há transição de pilares em vigas;
5. se existe transição por rotação de 90° de pilares na passagem do andar, tipo para o térreo ou para a garagem;

6. se são usados fatores de redução de inércias em pilares e vigas;
7. em estruturas que já possuem deslocabilidades com cargas verticais;
8. se existirem torções do pórtico espacial;
9. se há recalques não uniformes nas fundações.

Na figura 5 são mostradas algumas das situações anteriores.

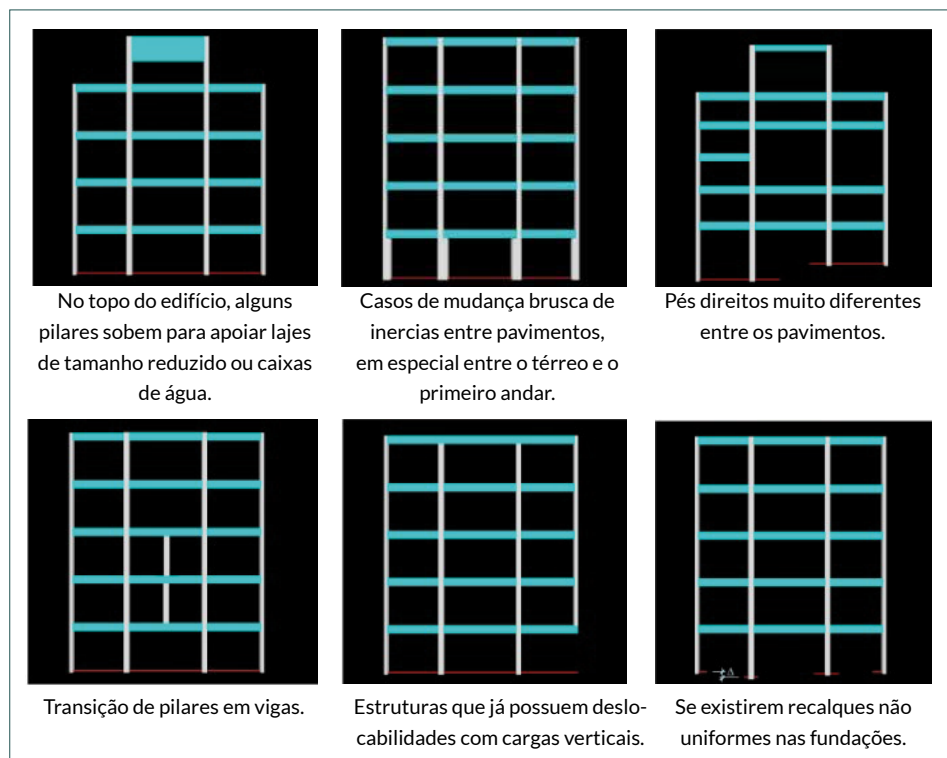


Figura 5 - Algumas situações onde não é recomendável aplicar o coeficiente γ_z .

O uso do γ_z deve ser analisado com muito cuidado nas estruturas que apresentam assimetria de geometria ou de cargas, incluídas as do vento. Fica claro que tal condição apresenta-se em um grande número de estruturas de edifícios. Podemos adicionar a estas limitações que a norma indica a aplicação do coeficiente em estruturas com um mínimo de quatro andares. Vários estudos indicam um valor limite de 1.3 para sua utilização.

Método iterativo

A efetividade dos coeficientes amplificadores dos efeitos de primeira ordem pode levar a resultados pouco efetivos, nas situações em que existam cargas verticais muito elevadas ou estruturas muito flexíveis lateralmente.

Nestes casos, uma alternativa é o uso de métodos iterativos, onde primeiramente é realizada uma análise de primeira ordem com as cargas horizontais. Os deslocamentos horizontais calculados são usados conjuntamente com as cargas verticais para calcular, em cada nível, um incremento equivalente de cargas equivalentes horizontais às quais são adicionadas as cargas horizontais iniciais. E, assim, a análise é repetida.

Como resultado, os deslocamentos horizontais têm um incremento que é utilizado conjuntamente com as cargas verticais para calcular outro grupo de incrementos equivalentes de cargas. Estes são novamente adicionados às cargas horizontais iniciais e a análise é realizada novamente. O processo é repetido até que o incremento nos deslocamentos horizontais seja desprezível, ou seja, menor do que um valor pré-fixado.

Na figura 6, é mostrado o cálculo, em cada nível de um edifício, dos incrementos de carga horizontal com efeito equivalente às cargas P do nível com excentricidade Δ com relação à base.

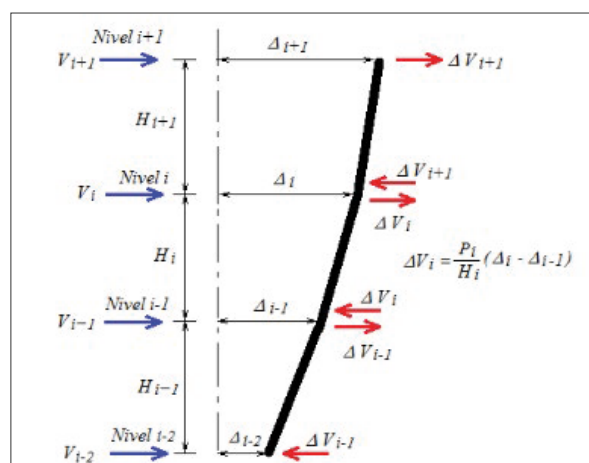


Figura 6 - Incrementos equivalentes de forças em cada nível.

A força resultante no nível “i” pode ser calculada mediante:

$$F_i = V_i + \Delta V_{i+1} - \Delta V_i \quad (6)$$

Método direto

A ideia do método direto já foi exposta no item 1. Aqui só vamos fazer uma extensão do conceito, já apresentado para o pilar, no caso de estruturas de edifícios. O algoritmo apresentado por E. L. Wilson, M. Eeri e A. Habibullah (1987) baseia-se em uma correção geométrica na formulação da matriz de rigidez para incluir o efeito P-Delta. O procedimento pode ser usado para análise estática e dinâmica, onde os períodos e modos de vibração são alterados pelo efeito P-Delta.

Considerando o deslocamento lateral do nível “i”, podemos calcular o momento produzido pela carga vertical do nível com relação à posição não deformada da estrutura como:

$$M_i = P_i \Delta_i \quad (7)$$

Este momento pode ser convertido em forças laterais equivalentes às aplicadas nos pavimentos “i” e “i-1” mediante:

$$\Delta V_i = P_i \Delta_i / H_i \quad (8)$$

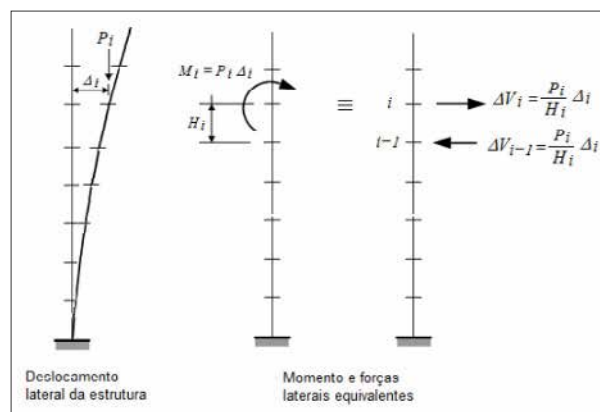


Figura 7 - Momentos e forças laterais equivalentes para o cálculo do efeito p-delta.

O efeito total será a soma das contribuições de todos os pavimentos. Matricialmente podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i \\ \Delta V_{i-1} \end{bmatrix} = \frac{P_i}{H_i} \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix} [\Delta_i] \quad (9)$$

As forças laterais da equação (9) podem ser calculadas para cada nível da estrutura e adicionadas às forças horizontais atuantes em cada pavimento. Obtemos como resultado um sistema de equações da forma:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} + [L]\{\Delta\} \quad (10)$$

Sendo:

K: matriz de rigidez lateral com relação aos deslocamentos horizontais dos pavimentos

Δ: vetor dos deslocamentos laterais dos pavimentos

F: vetor das cargas exteriores conhecidas

L: matriz que contém os termos P_i/H_i

Podemos escrever o sistema (9) na forma:

$$[K^*]\{\Delta\} = \{F\} \quad (11)$$

sendo:

$$[K^*] = [K] - [L] \quad (12)$$

O sistema anterior pode ser resolvido diretamente, sem iterações. Assim, obtemos os deslocamentos laterais mediante um procedimento linear, onde o equilíbrio da estrutura é atingido na configuração deformada.

Uma análise do sistema 11 indica que este não é simétrico, por causa da matriz [L]. Este problema pode ser resolvido substituindo as cargas laterais calculadas mediante (9) por um sistema de cargas equivalentes que é função dos deslocamentos laterais relativos entre pavimentos. Podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i \\ \Delta V_{i-1} \end{bmatrix} = \frac{P_i}{H_i} \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_{i-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Com esta modificação, a matriz $[L]$ resulta simétrica (note que também é quadrada e tridiagonal) e não se precisa de procedimentos especiais para a solução de sistemas não simétricos. A matriz que contém os termos P_i/H_i é chamada de rigidez geométrica. Note que nesta formulação não são consideradas as deformações por flexão dos pilares.

Pode-se ver que a matriz de rigidez geométrica não é função das propriedades mecânicas dos elementos, só depende da carga vertical e do comprimento do elemento. Esta rigidez geométrica existe em todas as estruturas, mas só se torna importante se é grande em comparação com a rigidez mecânica da estrutura. O nome rigidez geométrica é usado para fazer diferença com a rigidez mecânica que, sim, depende das propriedades físicas dos elementos.

Assumindo que a deformação do elemento é uma função cúbica obtemos para a rigidez geométrica:

$$\begin{bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ v_j \\ \phi_j \end{bmatrix} \quad (14)$$

Sendo v_i, v_j e ϕ_i, ϕ_j os deslocamentos e rotações nos extremos i e j do elemento e P a carga axial.

Por tanto, se $[K_M]$ é a rigidez mecânica, as forças totais no elemento são:

$$\{P\} = [F_M] + [F_G] = [K_M + K_G]\{u\} = [K_T]\{u\} \quad (15)$$

A partir da equação (15) pode-se formar a matriz de rigidez global da estrutura e resolver o sistema de equações considerando e calculando de forma direta os efeitos de segunda ordem.

Método do pilar com área a cortante negativa

Neste método é adicionado um pilar fictício com rigidez a flexão infinita, mas, deformável ao cortante.

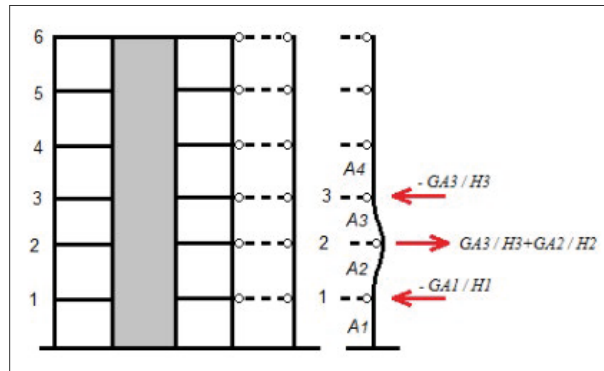


Figura 8 - Estrutura com pilar fictício de cortante.

Os coeficientes de rigidez correspondentes com o deslocamento unitário do nível 2 no pilar fictício de cortante são:

$$K_{12} = -GA_2/H_2; K_{22} = GA_2/H_2 + GA_3/H_3; K_{32} = -GA_3/H_3 \quad (16)$$

Igualando estes coeficientes de rigidez com os obtidos na formulação da matriz de rigidez geométrica do método direto podemos obter:

$$A_2 = -P_2/G \quad \text{e} \quad A_3 = -P_3/G \quad (17)$$

Portanto, pode-se obter a matriz de rigidez global modificada se o pilar fictício tem, em cada nível "i", uma rigidez a flexão muito alta e uma área de cortante:

$$A_i = -P_i/G \quad (18)$$

Na equação anterior P_i é a carga no nível "i" e G é o módulo de cortante do pilar fictício. O pilar fictício deve ficar ligado a cada nível da estrutura mediante elementos muito rígidos horizontalmente, rotulados nos extremos. Assim, é possível considerar, mediante uma análise de primeira ordem, o efeito P-Delta.

Método do pilar com rigidez a flexão negativa

Um método alternativo é considerar o pilar fictício com um momento de inércia negativo onde, em cada nível existem nós que restringem a rotação do pilar, como é mostrado na figura 9.

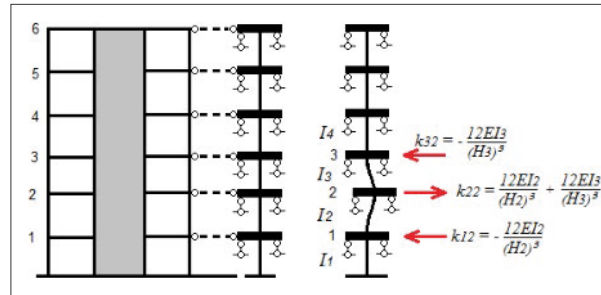


Figura 9 - Estrutura com pilar fictício de inércia a flexão negativa.

Novamente os coeficientes de rigidez e a flexão do pilar fictício correspondentes com deslocamentos horizontais unitários no nível 2 são:

$$K_{12} = -\frac{12EI_2}{(H_2)^3} ; K_{22} = \frac{12EI_2}{(H_2)^3} + \frac{12EI_3}{(H_3)^3} ; K_{32} = -\frac{12EI_3}{(H_3)^3} \quad (19)$$

Seguindo o mesmo procedimento do item 2.4, o pilar equivalente deverá ter nos níveis 2 e 3, momentos de inércia iguais a:

$$I_2 = -P_2 (H_2)^3 / 12E \quad \text{e} \quad I_3 = -P_3 (H_3)^3 / 12E \quad (20)$$

Portanto, o momento de inércia do pavimento "i", do pilar fictício deve ser:

$$I_2 = -P_i (H_i)^3 / 12E \quad (21)$$

Do mesmo modo que no caso do pilar com área de cortante negativa, no método a ligação do pilar fictício com a estrutura deve ser realizada mediante elementos axialmente muito rígidos.

Efeitos combinados de torção e translação

Os métodos anteriormente apresentados permitem considerar o efeito P-Delta devido a movimentos de translação. Na prática com frequência encontram-se casos de edifícios com assimetrias onde o efeito P-Delta é causado pela combinação de movimentos de translação e torção. Nestes casos a análise pode ser feita de forma direta e exata adicionando ao modelo estrutural um pilar fictício, com momento de torção e áreas a cortante negativas nas direções X e Y. As áreas a cortante são função da carga vertical enquanto o módulo de torção depende da distribuição em planta da carga. As áreas de cortante correspondentes ao nível “i” são:

$$A_{ix} = A_{iy} = - P_i / G \quad (22)$$

Também pode ser utilizado o método do pilar com momento de inércia negativa, as rotações nos extremos com relação ao eixo vertical devem ser restringidas. Os momentos de inércia e flexão nas direções X e Y são:

$$I_{ix} = I_{iy} = - P_i (H_i)^3 / 12E \quad (23)$$

A coluna fictícia deve ficar localizada no centróide das cargas verticais acima do nível “i”. O momento de inércia na torção J_i pode ser calculado a partir de:

$$\frac{1}{h_i} \sum [P_{ij}(dx_{ij}^2 + dy_{ij}^2)] = \frac{1}{h_i} P_i r_i^2 = - \frac{GJ}{h_i} \quad (24)$$

Sendo P_{ij} a carga vertical no pilar j do nível i, dx_{ij} e dy_{ij} são as distâncias até o centro de gravidade das cargas verticais no nível i nas direções X e Y respectivamente, r_i é o rádio de giro da carga vertical total P_i . O momento de inércia a torção no nível “i” é:

$$J_i = - P_i r_i^2 / G \quad (25)$$

Ferramentas informáticas de cálculo

Existem vários métodos para calcular o efeito P-Delta, sendo que as análises variam conforme os softwares existentes no mercado. É muito importante estar ciente das considerações e limitações da técnica implementada no programa de análise estrutural a utilizar. Analisaremos aqui três dos principais softwares de análise estrutural do mercado.

CAD/TQS

O programa emprega a matriz de rigidez secante $K_s = K_e + K_g(s) + K_l(r)$. K_e é a clássica matriz de rigidez elástica, $K_g(s)$ é a matriz de rigidez geométrica e $K_l(r)$ expressa as forças axiais decorrentes dos deslocamentos nodais perpendiculares às respectivas barras. O algoritmo de solução é o Newton-Raphson modificado, usando-se a matriz de rigidez geométrica como matriz secante. Nesta formulação, pode-se avaliar os efeitos P- Δ e P- δ . Em algumas situações a solução pode divergir.

O sistema permite considerar a correção da rigidez axial dos pilares nas combinações com P- Δ . O processamento é iterativo: no primeiro passo, a carga vertical é aplicada com uma correção da rigidez. Nos demais é introduzida a carga horizontal e calculado os efeitos de segunda ordem em estruturas. O processo permite analisar a não linearidade geométrica nos casos onde o uso do 2º seria limitado, tais como em edifícios altos e com efeitos de segunda ordem excessivamente altos.

SAP2000

Realiza uma análise iterativa para determinar as forças axiais provenientes do efeito $P-\Delta$ em estruturas reticuladas. As forças axiais são estimadas mediante uma análise preliminar da estrutura. Considerando essas forças, são resolvidas novamente as equações de equilíbrio. Este processo pode criar variações nas forças axiais. Devem-se realizar iterações adicionais até que as forças axiais e as deflexões laterais convirjam, atendendo a uma tolerância preestabelecida. O procedimento está baseado na utilização da matriz de rigidez geométrica. O SAP2000 pode analisar os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$, porém, é recomendável fazer a análise do efeito $P-\Delta$ na estrutura. E usar fatores majoradores de momentos para determinar os efeitos $P-\delta$ nos elementos, conforme adotado pelo ACI 318.

AltoQi - Eberick

O procedimento se baseia no estudo do equilíbrio da estrutura deformada após a análise de primeira ordem. Com os deslocamentos obtidos, são aplicadas cargas horizontais adicionais H em cada pilar do pórtico, função do deslocamento horizontal relativo e da carga axial:

$$H = N \cdot \Delta / L$$

Sendo N a carga vertical, Δ o deslocamento horizontal e L a altura do andar.

O conjunto das cargas fictícias é somado às cargas horizontais existentes. Uma nova análise leva a novos deslocamentos horizontais. Com os novos valores, o processo é repetido até que não haja diferença significativa entre duas iterações sucessivas.

Em algumas situações, o processo $P-\Delta$ pode não convergir, significando que a estrutura é excessivamente instável. Após a última iteração, caso haja convergência, obtêm-se os deslocamentos finais. Com base nestes deslocamentos serão calculados os esforços internos para o dimensionamento. O método da carga lateral fictícia adotado no Eberick apresenta bons resultados para estruturas. Consequentemente, de forma geral, mostra-se adequado para a análise dos efeitos $P-\Delta$ em estruturas reticuladas de concreto. Esta forma simplificada de análise não considera os efeitos $P-\delta$.

Exemplos de cálculo

Para entender melhor como calcular o efeito P-Delta vamos desenvolver dois exemplos simples, utilizando o método iterativo e o método direto.

Problema: calcular os deslocamentos em cada nível e o momento fletor na base considerando o efeito P-Delta na estrutura mostrada.

A seção transversal é retangular de 0.60x0.20 m. O módulo de elasticidade do material é $E = 25\,000\,000 \text{ kN/m}^2$.

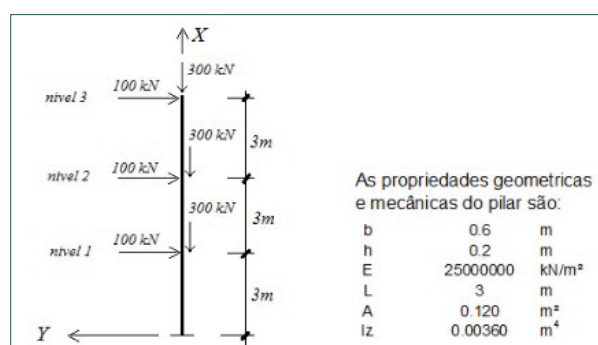


Figura 10 - Pilar de três níveis engastado na base e livre no topo.

Método iterativo

Calculando os deslocamentos laterais em cada nível mediante uma análise linear de primeira ordem obtemos:

- $D_3 = 45.00 \text{ cm}$
- $D_2 = 24.50 \text{ cm}$
- $D_1 = 7.50 \text{ cm}$, momento fletor na base do pilar = $1800.00 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (sem efeito P-Delta)

Primeira iteração

As cargas horizontais e deslocamentos são:

- $PH_3 = V_3 + P_3 \cdot D_3 / H_3 = 100 + 300 \cdot D_3 / 3 = 145 \text{ kN}$
- $PH_2 = V_2 + P_2 \cdot D_2 / H_2 - P_3 \cdot D_3 / H_3 = 100 + 300 D_2 / 3 - 300 \cdot D_3 / 3 = 79.5 \text{ kN}$
- $PH_1 = V_1 + P_1 \cdot D_1 / H_1 - P_2 \cdot D_2 / H_2 = 100 + 300 D_1 / 3 - 300 \cdot D_2 / 3 = 83.0 \text{ kN}$

Realizando novamente uma análise linear obtemos:

Nível	Deslocamentos (cm)	Diferencia com relação á iteração anterior (%)
3	$D_3 = 53.6$	16
2	$D_2 = 28.735$	14.7
1	$D_1 = 8.617$	13

Segunda iteração

As cargas horizontais e deslocamentos são:

- $PH_3 = V_3 + P_3 \cdot D_3 / H_3 = 100 + 300 \cdot D_3 / 3 = 153.6 \text{ kN}$
- $PH_2 = V_2 + P_2 \cdot D_2 / H_2 - P_3 \cdot D_3 / H_3 = 100 + 300 D_2 / 3 - 300 \cdot D_3 / 3 = 75.135 \text{ kN}$
- $PH_1 = V_1 + P_1 \cdot D_1 / H_1 - P_2 \cdot D_2 / H_2 = 100 + 300 D_1 / 3 - 300 \cdot D_2 / 3 = 79.882 \text{ kN}$

Nível	Deslocamentos (cm)	Diferencia com relação á iteração anterior (%)
3	$D_3 = 55.186$	2.9
2	$D_2 = 29.512$	2.6
1	$D_1 = 8.821$	2.3

Terceira iteração

As cargas horizontais são:

- $PH3 = V3 + P3 \cdot D3/H3 = 100 + 300 \cdot D3/3 = 155.186 \text{ kN}$
- $PH2 = V2 + P2 \cdot D2/H2 - P3 \cdot D3/H3 = 100 + 300D2/3 - 300 \cdot D3/3 = 74.326 \text{ kN}$
- $PH1 = V1 + P1 \cdot D1/H1 - P2 \cdot D2/H2 = 100 + 300D1/3 - 300 \cdot D2/3 = 79.309 \text{ kN}$

Nível	Deslocamentos (cm)	Diferencia com relação á iteração anterior (%)
3	D3=55.478	0.53
2	D2=29.655	0.48
1	D1=8.859	0.43

Como a diferença é maior do que 0.5% devemos continuar as iterações.

Quarta iteração

As cargas horizontais são:

- $PH3 = V3 + P3 \cdot D3/H3 = 100 + 300 \cdot D3/3 = 155.478 \text{ kN}$
- $PH2 = V2 + P2 \cdot D2/H2 - P3 \cdot D3/H3 = 100 + 300D2/3 - 300 \cdot D3/3 = 74.177 \text{ kN}$
- $PH1 = V1 + P1 \cdot D1/H1 - P2 \cdot D2/H2 = 100 + 300D1/3 - 300 \cdot D2/3 = 79.204 \text{ kN}$

Nível	Deslocamentos (cm)	Diferencia com relação á iteração anterior (%)
3	D3=55.532	0.10
2	D2=29.681	0.09
1	D1=8.866	0.08

Momento fletor na base do pilar = 2082.237 kN·m

Como a diferença é menor do que 0.5%, podemos finalizar as iterações. Note que o momento na base é maior do que o momento calculado no estado não deformado da estrutura. A diferença é de 13.6%, indicando que o efeito P-Delta é importante e não deve ser desconsiderado nos cálculos.

Método direto

Utilizaremos a formulação matricial do método dos deslocamentos para realizar dois cálculos. No primeiro (método direto 1), não consideraremos a flexão das barras, no segundo (método direto 2) será considerado este efeito.

Método direto 1

Utilizando a equação (9) do item 2.3 podemos plantear para os níveis 1, 2 e 3 as equações:

- $\Delta V1 = P1/h1\Delta1 - P2/h2\Delta2$
- $\Delta V2 = P2/h2\Delta2 - P3/h3\Delta3$
- $\Delta V3 = P3/h3\Delta3$

A matriz de rigidez global [K] da estrutura é:

2000000	0	0	-100000	0	0	0	0	0
			0					
0	80000	0	0	-40000	60000	0	0	0
0	0	240000	0	-60000	60000	0	0	0
-1000000	0	0	2000000	0	0	-1000000	0	0
0	-40000	-60000	0	80000	0	0	-40000	60000
0	60000	60000	0	0	240000	0	-60000	60000
0	0	0	-100000	0	0	1000000	0	0
			0					
0	0	0	0	-40000	-60000	0	40000	-60000
0	0	0	0	60000	60000	0	-60000	120000

Incluindo as equações $\Delta V1$, $\Delta V2$ e $\Delta V3$ na matriz anterior temos a matriz [K+KG]:

2000000	0	0	-1000000	0	0	0	0	0
0	79900	0	0	-39900	60000	0	0	0
0	0	240000	0	-60000	60000	0	0	0
-1000000	0	0	2000000	0	0	-1000000	0	0
0								
0	-40000	-60000	0	79900	0	0	-39900	60000
0	60000	60000	0	0	240000	0	-60000	60000
0	0	0	-1000000	0	0	1000000	0	0
0	0	0	0	-40000	-60000	0	39900	-60000
0	0	0	0	60000	60000	0	-60000	120000

Observe que a matriz anterior não é simétrica e que vários termos são menores do que na matriz [K].

Formando o vetor de cargas exteriores, temos:

$$P = \{-300 \ -100 \ 0.00 \ -300 \ -100 \ 0.00 \ -300 \ -100 \ 0.00\}^T$$

Resolvendo o sistema:

$$[K+KG]\{Z\} = \{P\}$$

Obtemos os deslocamentos nodais da estrutura, considerando o efeito P-Delta de forma direta:

$$Z = \{-0.0009 \ -0.0886714 \ -0.05396648 \ -0.0015 \ -0.29687118 \ -0.08100525 \ -0.0018 \ -0.55544135 \ -0.08878246\}^T$$

Método direto 2

Se for utilizada a matriz de rigidez [Kg] da equação (14), a matriz de rigidez geométrica da barra é:

$$-\frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{L}{10} \\ 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & \frac{L}{10} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{L}{10} \\ 0 & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores das propriedades mecânicas, geométricas e as cargas na matriz anterior e realizando o ensablagem da matriz de rigidez geométrica global [Kg]:

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-166.6667	0	0	83.33333333	30	0	0	0
0	0	-240	0	-30	-30	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	83.33333	-30	0	-166.6666667	0	0	83.33333333	30
0	30	-30	0	0	-240	0	-30	-30
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	83.33333333	-30	0	-83.33333333	-30
0	0	0	0	30	-30	0	-30	-120

Formando a matriz [K+Kg] temos:

2000000	0	0	-1000000	0	0	0	0	0
0	79833.3333	0	0	-39916.67	60030	0	0	0
0	0	239760	0	-60030	59970	0	0	0
-1000000	0	0	2000000	0	0	-1000000	0	0
0	-39916.6667	-60030	0	79833.33	0	0	-39916.6666	60030
							7	0
0	60030	59970	0	0	239760	0	-60030	59970
0	0	0	-1000000	0	0	1000000	0	0
0	0	0	0	-39916.67	-60030	0	39916.66667	-60030
0	0	0	0	60030	59970	0	-60030	119880

Observe que a matriz anterior é simétrica, o que é uma vantagem deste método.

Resolvendo o sistema:

$$[K+KG]\{Z\} = \{P\}$$

Obtemos os deslocamentos nodais da estrutura, considerando o efeito P-Delta de forma direta:

$$Z = \{-0.0009 \ -0.08683914 \ -0.05274578 \ -0.0015 \ -0.2888122 \ -0.07822359 \ -0.0018 \ -0.53704244 \ -0.08517011\}^T$$

Deslocamentos laterais. Comparação entre os métodos:

Deslocamentos (m)			
Análise Linear	Iterativo	Direto 1	Direto 2
-0.45	-0.55532	-0.55544135	-0.5370424
-0.245	-0.29681	-0.29687118	-0.2888122
-0.075	-0.08866	-0.0886714	-0.086839

Diferenciais (%)				
Iter vs. Linear	Direto 1 vs. 2	Direto 2 vs. Iter	Direto 1 vs. Iter	Direto 2 vs. Linear
19.0	3.3	3.3	0.02	16.2
17.5	2.7	2.7	0.02	15.2
15.4	2.1	2.1	0.01	13.6

A tabela anterior mostra que, no caso analisado, se não é considerado o efeito P-Delta o erro no cálculo dos deslocamentos laterais máximos pode ser de 16.2% - 19%, dependendo do método utilizado para o cálculo dos efeitos de segunda ordem globais. Pode-se ver também que os resultados são quase idênticos, pois nos métodos iterativo e direto 1 não foi considerada a flexão das barras. Nos métodos tratados aqui só foi considerado o efeito P- Δ , ou seja, o efeito P- δ é ignorado. Mas a flexão das barras é considerada no método direto 2 o que torna o mesmo mais “exato”.

Conclusão

Numerosos estudos confirmam que, em estruturas de poucos pavimentos, as diferenças entre os deslocamentos obtidos pelas análises de primeira ordem e pelos efeitos globais de segunda ordem são irrelevantes. Para estruturas com carregamentos convencionais o efeito P-Delta só é importante se a esbeltez é elevada ($\lambda > 130$).

Um edifício bem dimensionado não deve ter valores significativos do efeito P-Delta. Se a diferença entre os deslocamentos laterais, considerando ou não P-Delta, é maior do que 5% para a mesma carga lateral, deve-se avaliar um redimensionamento da estrutura porque esta pode ser muito flexível. Uma relação elevada entre o peso e a rigidez lateral da estrutura amplificará o efeito P-Delta, em alguns casos em até 25% ou mais, indicando assim instabilidade física.

Na prática, pode haver numerosas situações onde não é conveniente aplicar os coeficientes multiplicadores dos efeitos de primeira ordem para obter os de segunda ordem - como o coeficiente γ_z . Nestas situações deve-se calcular o efeito P-Delta mediante métodos como os apresentados neste e-book.

Um efeito P-Delta elevado pode introduzir singularidades na solução, indicando instabilidade estrutural. Isso indica que o dimensionamento deve ser revisado e que é preciso incrementar a rigidez da estrutura.

Para estruturas onde a carga vertical não muda significativamente é possível linearizar o processo de cálculo e realizar o cálculo direto e de forma exata. Isso evita técnicas iterativas que consomem tempo e podem ser ineficientes, particularmente no caso da análise dinâmica.

Da análise do método direto fica claro que, se a força axial inicial nos elementos muda significativamente, o processo de cálculo do efeito P-Delta deve ser iterativo.

Lembre-se sempre de todos os softwares no mercado não utilizam o mesmo método para calcular os efeitos de segunda ordem. Antes de selecionar um programa, estude os manuais, as informações de "ajuda" e tutoriais para entender o embasamento teórico do método implementado e suas limitações.

Nunca use um programa sem conhecimento claro da teoria de cálculo utilizada. Afinal, os programas não têm inteligência: é responsabilidade do engenheiro a correta modelação estrutural, a seleção da ferramenta de cálculo, seu uso e a interpretação

Conecte-se a minha conta no linkedin





altoqi.com.br

São Paulo
(11) 2666 4920

Rio de Janeiro
(21) 2169 8725

Santa Catarina
(48) 3239 7000
(48) 3027 9000

 (48) 99129 3911